ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9
ЗАДАЧИ НА БЕЗУСЛОВНЫЕ И УСЛОВНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=x^2+2xy-+4xz+8yz+5y^2+9z^2.$$

Решение

Найдем стационарные точки функции $f(x,y,z)$. Они определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+2y+4z=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x+10y+8z=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=4x+8y+18z=0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}=8\cdot 16>0.$$

Поэтому единственное решение однородной системы есть $x=y=z=0$.

Итак, функция $f(x,y,z)$ имеет единственную стационарную точку $(0,0,0)$. Найдем

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial z^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Так как,

$$D_1=2>0,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}>0,\quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{vmatrix}=8\cdot 16>0,$$

то, в силу критерия Сильвестра

$$\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 18 \end{pmatrix}>0.$$

Точка $(0,0,0)$ является точкой локального минимума функции

$f(x,y,z)$, причем $f_{\min} = f(0,0,0) = 0$.

Упражнения

Исследовать на экстремум функции двух переменных (1-17).

1. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$.

3. $f(x,y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$.

4. $f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

5. $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

6. $f(x,y) = (x + y^2)e^{\frac{x}{2}}$.

7. $f(x,y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$.

8. $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}$.

9. $f(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$.

10. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2e^y - e^{-y^2}$.

11. $f(x,y) = (25 - 5x - 7y)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

12. $f(x,y) = 108\ln x - xy^2 + \dfrac{y^3}{3}$.

13. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$.

14. $f(x,y) = xy\ln(x^2 + y^2)$.

15. $f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y$.

16. $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$.

17. Найти все стационарные точки функции $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточное условие экстремума?

18. Может ли непрерывная дифференцируемая функция $f(x,y)$ иметь бесконечное множество максимумов и ни одного минимума?

19. Верно ли утверждение: если непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$, $(x,y) \in R^2$, имеет только одну стационарную точку (x_0, y_0), в которой у нее локальный минимум, то справедливо неравенство $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, $(x,y) \in R^2$?

Исследовать на экстремум функции трех переменных (21-30).

21. $f(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

22. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$.

23. $f(x,y,z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

24. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4x+6y-2z$.

25. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+6xy-4z$.

26. $f(x,y,z)=xyz(16-x-y-2z)$.

27. $f(x,y,z)=xy^2z^3(49-x-2y-3z)$.

28. $f(x,y,z)=\dfrac{xy+xz^2+y^2z}{xyz}+x+1$.

29. $f(x,y,z)=\dfrac{256}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2$.

30. $f(x,y,z)=2\ln x+3\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z)$.

Замечание

Пусть X_0 - единственная стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(X)$, $X\in R^n$, и X_0 реализует его локальный минимум. Будет, ли эта точка точкой его глобального минимума? Ответ на этот вопрос отрицателен. Соответствующий пример дает функция

$$f(x,y)=\frac{3x^2-2x^3-1}{1+y^2}+(3x^2-2x^3)e^{-y}.$$

Эта функция имеет лишь нулевую стационарную точку, которая реализует ее локальный минимум, поскольку матрица

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial X^2}=\begin{pmatrix}12 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}>0.$$

Однако, $f(0,0)=-1$, $f(2,0)=-9$.

1. Проверить указанные точки на оптимальность в задачах выпуклого программирования:

1) $f(X)=-2x_1^2-3x_2^2+x_1-6\to\max$,

$\mathcal{W}=\{X: x_1^2+x_1-3\le 0,\ 2x_1+x_2-5\le 0,\ x_2\ge 0\}$,

$X^1=(1,1)$, $X^2=(2,1)$, $X^3=(1/4,0)$, $X^4=(0,0)$;

2) $f(X)=x_1^2+3x_1\to\min$,

$\mathcal{W}=\{X: x_1^2+x_2^2-2x_1+8x_2+16\le 0,\quad x_1-x_2\le 5\}$,

$X^1=(1,-4)$, $X^2=(0,-4)$, $X^3=(2,-4)$;

3) $f(X) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_1 - x_2 \to \min,$

$\mathcal{W} = \{ X : x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 - 3x_2 \le 4,\ -2x_1 + x_2 \le -3 \},$

$X^1 = (5/2, -1/2),\quad X^2 = (1, -1),\quad X^3 = (2, 0);$

4) $f(X) = x_1^2/2 + x_2^2 - 5x_1 + x_2 \to min,$

$\mathcal{W} = \{ X : x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3,\quad 2x_1 - x_2 - 3x_3 \ge -11,\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \},$

$X^1 = (1, 0, 2),\quad X^2 = (0, 0, -1),\quad X^3 = (1, 3, 0),\quad X^4 = (2, 1, 1),\quad X^5 = (5, 0, 1);$

5) $f(X) = e^{x_1 + x_2} + x_1^2 - 2x_2 \to \min,$

$\mathcal{W} = \{ X : x_2 \le \ln x_1,\quad x_1 \ge 1,\quad x_2 \ge 0 \},$

$X^1 = (2,\ \ln 2),\quad X^2 = (2, 0),\quad X^3 = (1, 0);$

6) $f(X) = e^{x_1 + x_2} + x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 \to \min,$

$\mathcal{W} = \{ X :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 18,\quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \le 0 \},$

$X^1 = (-3, 3, 0),\quad X^2 = (1, -1, 4),\quad X^3 = (-3, -3, 0),\quad X^4 = (0, 0, 3);$

7) $f(X) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 + x_1 \to \max,$

$\mathcal{W} = \{ X : x_1^2 - x_2 + x_3 \le 5,\quad x_1 + 5x_2 \le 8,\quad x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \};$

$X^1 = (0, 0, 0),\quad X^2 = (1, 0, 4),\quad X^3 = (3/14, 1/7, 0),\quad X^4 = (4, 0, -11);$

8) $f(X) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 26 \to \max,$

$\mathcal{W} = \{ X : x_1^2 \le 25,\quad x_1 + 2x_2 - 5 \le 0,\ x_2 \ge 0 \},$

$X^1 = (0, 0),\quad X^2 = (-1, 2),\quad X^3 = (0, 6),\quad X^4 = (3, 0);$

9) $f(X) = 10x_1^2 + 5x_2^2 - x_1 + 2x_2 - 10 \to \min,$

$$\mathcal{W}=\left\{ X: 2x_1^2-x_2\le 4,\quad x_1+x_2\le 8,\quad x_1\ge 0 \right\}$$

$$X^1=(0,0),\quad X^2=(1,1),\quad X^3=(0,-1);$$

10) $f(X)=4x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2-x_1+6x_2-5\to\min$,

$$\mathcal{W}=\left\{ X: x_1^2-x_2^2\ge -3,\quad 3x_1^2+x_2\le 4,\quad x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0 \right\},$$

$$X^1=(0,0),\quad X^2=(5,0),\quad X^3=(1,-1),\quad X^4=(1,1);$$

11) $f(X)=x_1^2+5/2x_2^2-x_1x_2\to\min$,

$$\mathcal{W}=\left\{ X: x_1^2-4x_1-x_2\le -5,\quad -x_1^2+6x_1-x_2\ge 7 \right\},$$

$$X^1=(2,1),\quad X^2=(3,2);$$

12) $f(X)=x_1^2+2x_2^2+30x_1-16x_3\to\min$,

$$\mathcal{W}=\left\{ X: 5x_1+3x_2-4x_3=-20,\quad x_1-6x_2+3x_3\le 0,\quad x_3\ge 0,\right.$$

$$X^1=(-3,1,2),\quad X^2=(-5,3,1).$$

2. Используя приближенную задачу, найти оптимальное решение следующих задач.

1. $F=x_1-x_1^2+x_2\to\max$

$$\begin{cases} x_1^2+2x_1+3x_2^2\le 3,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$$

2. $F=3x_1+2x_2\to\max$

$$\begin{cases} 4x_1+x_2^2\le 16,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$$

3. $F=-(x_1-4)^2-(x_2-3)^2\to\max$

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\le 6,\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{cases}$$

4. $F = 4\left(x_1 - 1\right)^2 + 16\left(x_2 - 5\right)^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $F = 4x_1^2 + 3x_2^2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4. \end{cases}$$